數學傳播　48卷4期, pp. 35-52

以數學理解世界

2024 年院區開放

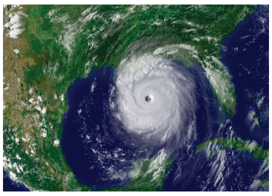
程之寧

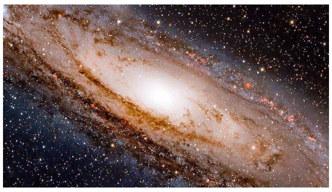
統計與機率是什麼? 統計與機率當然就是在講: 當你有很多很多數據的話, 你覺得它的行爲會是什麼? 或者是, 我們怎麼樣從很多數據裡面得到一些資訊。爲什麼我要把它改成放在第一個講? 它其實和數學的歷史是很不相容的, 因爲數學的歷史不是從這個開始。

I. 統計與機率

雖然很多研究都指出: 人類可能天生就有對數字的感覺, 所以數學的歷史是從數數開始的; 就像小 baby, 歷史介入數學也是從一二三四五六這樣開始。但是普遍來講, 人類好像對很大的數字, 會感到難以理解, 沒有那種直覺。但是偏偏到處都有數據, 這對於理解現在的社會是不可或缺的工具。所以我想第一個拿出來講的就是統計, 希望國、高中的數學裡面, 教育裡面也可以, 納入越來越多統計的概念。

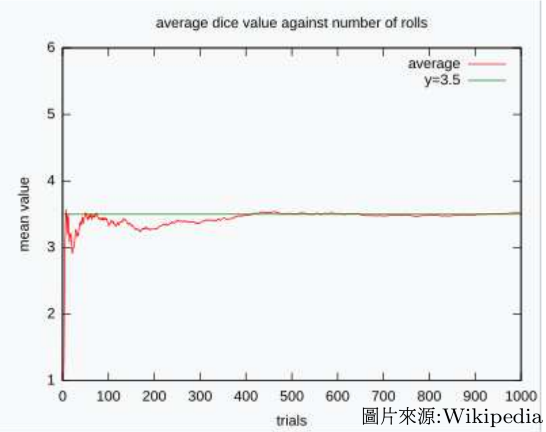
圖片來源:VSP Technologies Services


圖片來源:Authentically Belize


圖片來源:Medium

圖片來源:Medium

統計

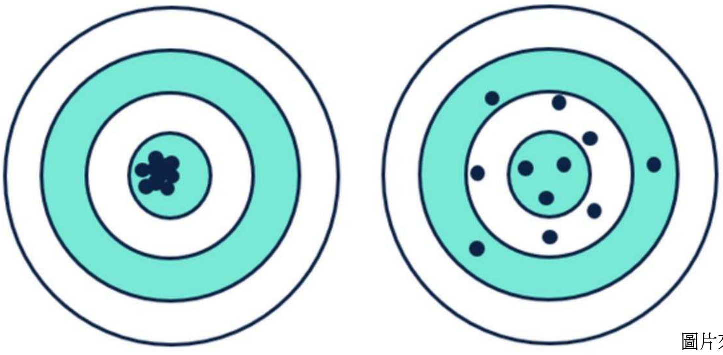


圖片來源:Wikipedia

我們回來再講: 統計是什麼? 我剛剛講說: 統計其實就是關於很多很多的數字, 很大的數字, 所以統計的開端是從白努利的大數法則開始。這大概是 18 世紀的事情, 已經蠻晚近了。這個白努利和物理學的白努利, 不是同一個白努利, 他們一家都是天才, 他們好像是舅甥的關係之類的。他發現的一個法則, 就是你的樣本數、抽樣的數量越多, 它的平均值就有越高的可能來接近期望值。那麼什麼是期望值? 你可以把它想成是一個理論上的平均值。例如說, 你今天丟骰子, 骰子有 6 面 1, 2, 3, 4, 5, 6, 如果這骰子是公平的, 你丟下去每一面出現的機率都是一樣的,

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$$

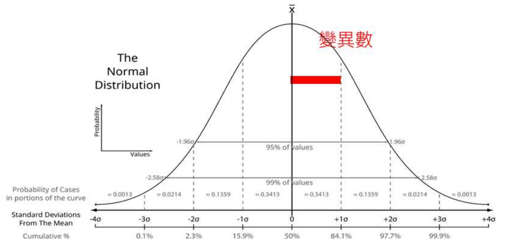
對不對? 所以它的理論上的平均值就是這個算式 $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}$ 算出來的 3.5, 對不對? 可是你丟一次骰子不可能丟出來 3.5, 丟兩次可能是 1 和 2, 平均也不是 3.5, 難道這期望值的平均值, 理論平均值是錯的嗎? 不是。我們都知道玩過骰子的人都知道, 你要丟很多次, 越來越多次, 它的平均值就真的會跟理論的平均值一樣, 這就是白努利發現的事情, 花了人類可能幾千幾千年才歸納出這樣子的一個規律。


圖片來源:github

除了平均值之外, 我們還知道數據的變異性有多大。什麼叫變異性呢? 像你看這兩張圖就知道, 它們的平均值都是在最中間。左邊這樣子的, 我們就說它變異數比較小; 右邊就是有很多異類的, 我們說它的變異數很大。我們再想想, 如果你有發明一種新的骰子, 它有三面是 3, 三面是 4, 所以它的平均值是不是和普通的正常的骰子一樣是 3.5? 但是你後來新發明的那種奇怪的骰子, 變異數就比較小, 因爲你骰出來不是 3 就是 4, 都很靠近平均值。正常的骰子骰出來可能是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 雖然平均出來是一樣的數字, 但它有很多異類, 屬於像右邊的那樣狀況, 變異數很大。這就是平均值跟變異數, 是在數據裡面對我來講最重要的兩個數。

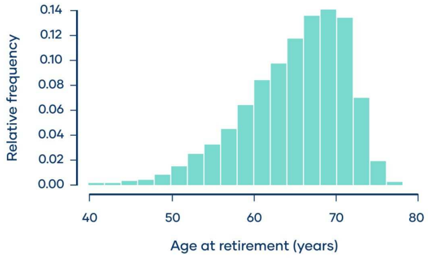
我們常常在講常態分布, 大家都聽過它, 那麼常態分布到底是什麼? 常態分布, 又或者叫

做鐘形曲線, 它就是長成這樣子一個的分布。它的變異數就是紅色這一條。所以常態分布越肥, 它的變異就越大; 常態分布越尖, 它的變異就越小。



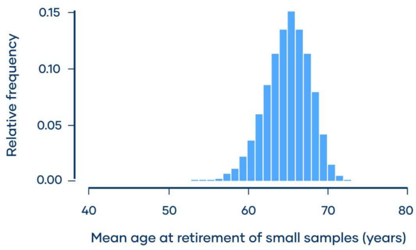
圖片來源:Research Gate

爲什麼我們要一直講常態分布? 到底是爲什麼? 這也是來自數學, 它背後的原因就是所謂的中央極限定理, 它在講什麼? 它在講的就是說: 平均下來, 我們都很常態, 我們都很正常。那是什麼意思呢? 你們要看的話, 可以看定理的內容, 或者是可以先從例子來講。我們現在看的例子是: 可能 1 萬個人, 我們去調查他們的退休年齡, 然後你把那個樣本畫出來, 它的分布是這樣子, 看起來有像常態分布嗎? 沒有, 它左右不對稱, 沒有像那種鐘形曲線的常態分布, 所以這個資料並不是一個常態分布的資料。

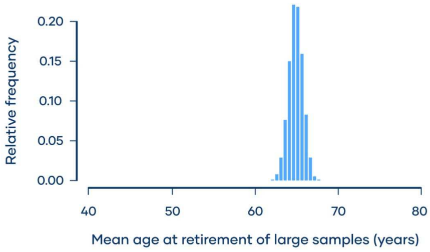


圖片來源:Scribbr

你也可以想, 例如說 1 萬個人把它分成 1 萬組, 一個人一組, 然後把每一組的平均值畫出來是這樣, 對不對? 我們現在也可以用另外一種呈現法: 1 萬人, 我們把它分成一千組, 10 人一組, 然後去畫那 10 人一組的平均值。我們把那個一千的數字把它畫出來, 它長這樣就會像左圖這樣, 看起來就比較像常態分布, 是不是? 有像喔, 就是這樣圓圓的左右對稱。你如果再分更多人一組, 例如說我把它分成 100 組每組 100 個人, 然後去取那個 100 個人的平均的退休年齡, 然後把 100 個數字畫出來,



圖片來源:Scribbr



圖片來源:Scribbr

它長的就是右圖這樣, 看起來左右平均, 的確就是很像一個常態分布, 對不對? 這就是中央極限定理告訴你的第一件事情: 如果要取平均值的話, 樣本數越大取得的平均值, 就會越來越像常態分布。第二件事情就是你比較左圖和右圖, 右圖是不是比較尖、比較高? 左圖是不是比較肥? 我們剛剛講到變異數; 如果說平均的樣本的數量 N 越高的話, 變異數就會越來越小, 變小的方式就是以 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 來減少; 左圖 N 是 100, 因爲是 100 人一組, 右圖 N 就是 10, 因爲 10 人一組; 它就會越來越尖、越來越小, 然後越來越像常態分布。

這和我們的世界有什麼關係? 比如說, 快到選舉的時候, 你們可能還不能投票, 但是可能

家裡的大人都會一直在講: 民調現在幾%, 對不對? 一家的民調怎麼樣? 民調到底準不準? 我問你一個問題, 很簡單, 大家隨便猜一下, 反正不是在考試。我想要知道台灣人對打疫苗的想法。我做了四份民調, 或者是有四組人做了四份民調: 在中研院門口訪問 10 人、全國隨機市話訪問 10 人、在中研院門口訪問 500 人、全國隨機市話訪問 500 人, 哪一組你覺得相對來講比較有參考價值?

看起來好像絕大多數的人, 都覺得相對來講有參考價值的是, 第一: 不是 10 人的, 是 500 人的樣本數, 第二: 不是今天在中研院門口訪問, 而是全國隨機實況訪問。的確理論上來講, 這是比較好的, 比較值得參考的一份調查。爲什麼呢, 有兩個因素。這就是告訴我們說, 民調會不準有兩個原因:

第一個是抽樣 (隨機) 的誤差; 我們剛剛那個中央極限定律, 告訴我們說, 隨著樣本數 N 的增加, 抽樣的誤差, 會以 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 來減少, 對不對? 那也就是像你丟骰子一樣, 例如說你丟 N 次平均, 你丟出來的平均數和 3.5 的距離, 也是會以這樣子的定律來減少。

第二個叫做系統誤差; 這個問題就是: 樣本是不是有代表性? 你們可能有聽過, call in 的民調通常是完全不準, 爲什麼? 因爲它的抽樣很有可能沒有代表性, 只有會去看這個特定的 call in 的節目的人, 才會打電話進去, 對不對? 他可能有他自己的, 譬如說政黨偏好, 或者是生活習慣, 那麼就不足以代表, 是不是? 不具全國大家的代表性。

當然數學家沒有辦法幫你回答, 但這也就是爲什麼我們每次到選舉都會有這種討論: 是不是市話民調比較準, 手機民調比較準? 要幾 %、可以幾 % 這樣混合起來會準? 然後大家在那邊吵翻天, 吵的就是: 要怎麼樣去做這個調查, 樣本才會代表譬如說一個平均的台灣的樣子、台灣選民。基本上, 從你們剛剛已經聽到的, 譬如說, 中央極限定理或者是大數定理, 基本上就可以回答這個問題。當初在參選的時候, 他們是不是有很多爭論: 什麼是誤差值? 到底是什麼讓 6% 或者讓 3%? 反正就是這些東西。你用前面這些定理, 自己就可以分辨。

圖片來源:TVBS News

統計就講到這邊。統計就是在做這些事情。希望我已經說服你們: 懂一些統計, 真的對理解世界來講, 非常重要。

機率

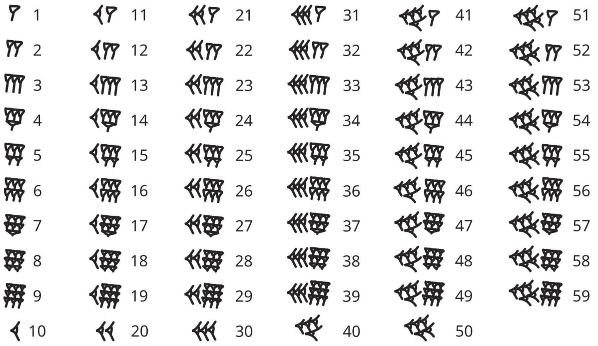
接下來在講的就是機率, 這和統計很相關。機率在講什麼? 就是事情發生的機率。譬如說, 我們來看看大家對機率的概念。朋友今天傳一個簡訊來說: 我快篩陽性今天不出門。我想知道的就是, 那準嗎? 結果這位朋友說這個快篩品質還不錯; 據檢驗, 如果真的有得新冠的話, 快篩出來兩條線的機率是 8 成, 沒有得的話, 測出來一條線的比率是 9 成, 這個快篩品質不錯。

現在疫情還在流行; 目前有得新冠的人, 大概是總人口數的 1%, 那麼你就可以算出來, 得新冠的機率是多少? 結果出來囉, 很多人覺得是 8 成以上, 最多人回答的是 5 成到 8 成比例。正確答案是最少人選的嗎?

大家學一下機率, 我現在就算給你們看。記得喔, 你想想看: 現在有 1% 的人得新冠, 對不對? 照這個比率, 得新冠的這些人快篩出來陽性的比率是 80%; 現在如果這些人全部都去做快篩的話, 0.8% 的人是真的有得。相同的, 既然說 1% 的人得了新冠, 99% 的人目前沒得新冠, 對不對? 其中的 9 成出來是一條線, 其中的 1 成 9.9% 出來是兩條線。那麼我們現在重點就是: 我已經知道這個朋友是在一個範圍裡面, 他測出兩條線對不對? 已知他測出兩條線, 然後在這前提之下, 他真的有得新冠的機率, 是不是 0.8 和 9.9 這兩個數加起來變成分母, 然後 0.8 變成分子? $\frac{0.8}{0.8+9.9} = \frac{0.8}{10.7}$, 機率只有 7.5%。

	快篩陰	快篩陽
得新冠	0.2%	0.8%
未得新冠	89.1%	9.9%
	89.3%	10.7%

如果說今天新冠真的很流行, 10% 的人現在都得新冠, 我們就知道這個數字會怎麼改變; 機率是會再上升, 對不對? 如果這個朋友又有跟你說, 除了兩條線之外, 他還喉嚨癢、頭痛, 還有一點發燒, 那麼你就可能要再把那個表弄得更大, 就是有喉嚨癢、頭痛又發燒的, 得新冠的機率是多少? 那麼你算出來這個機率也會變大很多。這就是代表說機率是很重要的事情, 然後有時候和你想的真的不一樣; 還是要學一下、想一下, 把那個邏輯想一遍, 你對事情會有比較正確的判斷。統計與機率, 我差不多就講到這裡。順帶一提, 你如果對這有興趣的話, 這叫貝氏定理。我們中研院當然也有統計所, 所以我現在有點搶人家的事情來做。但是基本上對於國中生、高中生這樣子的年紀來講, 統計還是算在數學的一部分。只是說因爲統計真的很重要, 所以有一些專業研究機構會把統計單獨分出。好, 大家有問題嗎? 沒有的話, 我們就來回到比較是古典的數學, 那就從數數字開始。就像我們從剛剛講的, 從小開始, 第一次接觸到數學, 可能不是除法、開根號, 可能是數數。

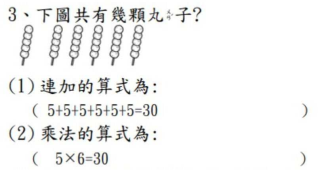


圖片來源:Threads

II. 數數

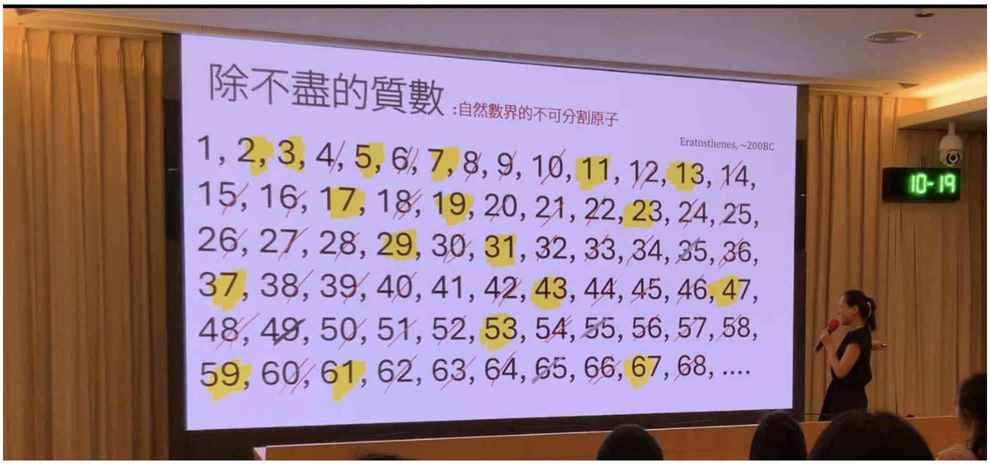
數的話, 感覺是非常自然的事情, 甚至正整數是在巴比倫時代就發明了, 叫巴比倫數字系統, 所以是從五千年前之前就有這樣的數。因爲它很自然, 所以它就叫自然數。到了十九世紀, 有一位非常著名的數學家 Kronecker, 對數學做出了很大的貢獻; 他說神創造了自然數, 其他都是人造的。

自然數有很多很棒的性質, 比如說自然數加自然數, 正整數加正整數, 還會是正整數, 正整數乘以正整數也還會是正整數。所以你可能到小學三年級吧, 數學課都是很開心的, 只有在討論正整數而已。



圖片來源: 新北市安和國小

我們剛剛有講到乘法, 那麼你可以開始問: 2 的倍數是什麼? 2、22、24、236。2 的倍數除了它自己以外的倍數。我們把它用紅色劃掉。同樣的 3 的倍數我們把它用橘色劃掉。然後你可以這樣子再重複, 譬如說, 5 的倍數除了自己的把它劃掉, 7 的倍數除了它自己的把它劃掉, 沒劃掉的就繼續乘。爲什麼沒有 41? 蛤? 沒有塗到耶, 沒有劃到也沒有塗到耶; 好, 那請用在你自己腦子裡, 用你自己腦子的螢光筆, 去把 41 塗一下好不好。



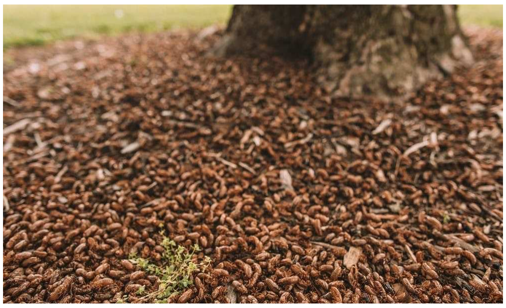
院區開放現場照片

剩下來的就是所謂的質數, 因爲它沒有辦法被 1 和它自己之外的其他數除盡。我們剛剛講的很笨的方式, 就是希臘數學家在兩千多年前尋找質數的方式。我們現在科技很進步, 對不對? 但是其實找質數的方式還是差不多。

好, 質數很酷, 它是正整數界的不可分割的原子, 其他的數就可以用質數去乘, 然後把它乘出來, 但是它自己沒有辦法如此。但是它和世界有什麼關係呢? 現在就是講一個小故事。質數其實在自然界裡面常常出現。我就舉一個例子, 因爲今年剛好是一個很適合講這個的年。

自然界裡面有很多奇奇怪怪的生物, 有一種叫週期蟬, 它的一生基本上都是在地下, 是地下蟲生。小 baby 生出來之後就鑽到地下了。在那裡 N 年之後的夏天才會破土而出, 然後在四個禮拜之內羽化、交配、產卵, 做一些傳宗接代的事情, 然後它就化了。它的卵孵出來之後, baby 又爬到地下裡面。以我們的角度來講這是蠻悲慘的蟲生。現在問題是: 它的週期 N 到底是多大? 大家都有聽過, 很酷, 對。在北美, 主要在美國, 有兩種週期蟬, 一種的週期是 13, 一種是 17, 好巧都是質數; 它是真的只是一個巧合嗎? 不管, 反正 13 或 17 年。那麼要幾年這兩種蟲才會相遇呢? 221。因爲它兩個都質數, 所以你要把 13 和 17 乘起來就 221。今年的夏天,

這兩種蟬就同時出現在北美; 有上兆隻, 聽說超級噁心。



圖片來源:Shutterstock

圖片來源:Home Run Taiwan

221年才會一遇; 這對它們來講, 有什麼意義呢? 我們是不是可以相信說, 是因爲演化的選擇, 才讓它們都是質數呢? 因爲兩種蟬相遇, 對它們是好事還是壞事? 壞事, 因爲它們要搶食物, 要搶資源, 要搶地, 對不對? 你看這個好可怕, 甚至還會有雜交的問題。譬如說假如說一個周期12年, 一個周期 15 年, 它們 60 年就遇一次, 可能這樣遇幾次的時候就絕種了。所以物競天擇剩下來的, 可能就是質數周期的。質數常常以這樣子的方式出現在自然界。

不只自然界, 我們待會再講, 質數其實非常地難處理。例如說, 19 世紀的 Lucas 花了很多很多時間, 在 1876 年證明這個數 $2^{67}-1 = 147,573,952,589,676,412,927 =$ 一百萬兆 ······, 21 位, 不是質數。但是你要證明它不是質數, 就是很想要把它做質數分解, 找出來到底是什麼數乘什麼數乘什麼數才會變成它。這其實是一件非常難處理的事情, 即使現在電腦很厲害、很厲害, 這還是很難解的事情。有位 Cole 先生花了很多很多年, 據說每個禮拜天都在做這件事情; 禮拜天要陪小孩玩會怎樣? 爲什麼數學家要那麼無聊? 喔, 這你就不懂嘛, 這個解出來很開心啊, 而且你就是很想知道, 晚上就一直在想這件事情; 可是要上班, 沒關係, 我禮拜天再來做一次運算好了。

可能就是這樣子, 而且他不是唯一一個人。1903 年他解出來之後, 據說給了一場非常轟動的演講。他一整個演講不像我一直囉哩巴唆, 他一句話都沒有講。他走到黑板前面, 左邊寫這個方程式 $2^{67}-1 = 147,573,952,589,676,412,927$, 然後他走到黑板的右邊, 寫了 $193,707,721 \times 761,838,257,287$, 然後他就開始算, 算了一個小時, 寫得密密麻麻, 最後得到這個數 147,573,952,589,676,412,927, 丟了成品就走了。然後大家就站起來, 幫他拍手。所以不是他一個人而已喔, 大家都覺得: 你好帥帥, 算得出來實在是太棒。所以還是有很多人, 不覺得這個無聊。

數學對我們、對現在的社會, 或者科技是多麼的重要。你如果去讀數學史的話, 就知道這些其實是很多很多無聊的人一點一滴建造出來。質數分解實在是太難了, 沒有他們這麼無聊, 可能你今天就沒有辦法網購了。在網路上買一大堆有的沒的, 永遠都不會用到的東西, 都要感謝這些人, 爲什麼呢? 網購時是不是要輸入你的信用卡號碼? 你有想要每個人都知道你的信用卡號碼嗎?

你只想要商家知道, 對不對? 商家譬如說, 蝦皮、亞馬遜, 不曉得, 他們怎麼知道呢? 它的處理方式是這樣子的。我把一個很大很大的質數 p, 再乘以另外一個很大很大的質數 q, 然後得到一個爆炸大的自然數, 我們叫它 m, 現在大家用的大概是 50 位這麼多。質數 p 和 q 只有我知道, 然後我不跟你說。但是我跟你說什麼? 我跟你說這個乘起來的結果 m; 大家都可以看得到它; 沒關係的, 都給你看, 因爲就算知道這個數, 你也沒有辦法把 p 和 q 找出來, 對不對? 才 21 位的數, 那位老兄就花了幾年的禮拜天計算, 對不對? 現在這 50 位的數, 沒有人也沒有電腦可以在很快的時間裡面解出來。所以我就很大方地跟你講。

圖片來源:Nexus IE Ltd

然後我就在網購時輸入我的信用卡號碼。電腦系統就把這個信用卡號碼變成另外一個正整數 n。它就可以用這個公開的、很大的數 n, 得出另外一個正整數 n'; 細節我就不講, 有一點點複雜。這個正整數 n' 我就傳給你囉。問題就是在這個箭號 $n' \to n$; 如果我可以把這個箭號反過來、推回去的話, 我就可以知道這個信用卡號碼是什麼。問題是說我要把這個箭號反推回去的話, 我需要的是什麼? 我需要的是 p 和 q。我不知道這個很大的數的質數分解的話, 就沒有辦法把這個箭號反回去。所以不管淘寶、亞馬遜, 就靠著這個 p 跟 q, 把那個箭號又反推回去, 來知道你的信用卡號碼。這就是現在我們每天要用到質數的一個方法。所以不要嫌我們數學家無聊喔。

質數這麼酷這麼有用, 我們是不是想要知道: 總共有幾個質數? 還是你們覺得只有一兩位數學家想要知道這個, 但是其實從希臘那時候就很多數學家想要知道這個問題, 而且把解答解出來了, 還證明給你看。其實很簡單。例如說我假設我數學真的很爛, 我就猜想說: 世界上只有 2、3、5, 三個質數而已, 我就把這三個數乘起來變成 30, 然後再加上 1, 得到另外一個正整數 31。結果我算了半天什麼數可以除盡 31, 沒有耶, 哇, 31 也是質數, 所以我的假設錯了, 並不是只有這三個質數; 好, 那我們現在要認錯。我們現在開始假設, 現在有四個質數。假如只有 2, 3, 5, 31 四個質數。考慮 $X = 2 \times 3 \times 5 \times 31 + 1 = 931$。但是檢查發現 $931 = 7 \times 19$ 不是質數。所以不是只有 2, 3, 5, 31 四個質數, 還有 7 和 19。所以說我的假設還是錯的。我就一直重複下去囉, 對不對?

這個重點就是說, 你如果把幾個質數乘起來再加上 1, 因爲 1 沒有辦法被任何其他數除盡, 所以這個數沒有辦法被這些質數裡面任何一個除盡。你可以想像這個循環一直無限輪迴下去。如果你有這樣子的想法的話, 你就可以證明。歐幾里得在很早之前 (300 BC) 就證明: 有無限多個質數。他的方法就是: 假設我覺得有 N 個質數 $p_1, p_2, \ldots, p_N$, 然後我把它全部乘起來再加上 1, 得到 $X = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1$ 那麼就只有兩種情況:

情況一是: X 是質數, 那我假設就錯了, 我要再多得到一個質數。

情況二是: X 不是質數, 那麼它一定可以被其他的數除盡; 而且我們剛剛講過, 因爲 1 不能被任何數除盡, 所以 X 一定不是被這幾個質數 $p_1, p_2, \ldots, p_N$ 除盡, 所以我們又發現了其他的質數。

所以以上任何的情況, 都跟假設相矛盾, 這樣子我們一定會有無限多個質數。那麼我問你喔, 你們猜一猜, 如果一直重複這樣子的輪迴, 當然不要有錯誤啦, 所有的質數都可以被這樣找出來嗎? 猜一猜, 我不知道那個時候你幾歲; 假設你可以永遠活著, 任何一個質數都可以這樣被找出來嗎? 你們想知道答案嗎? 答案是: 數學家到今天還不知道。大家這個問題, 幾千年來很多人去研究, 還沒有一個定論, 所以就靠你們了。

而且質數真的是很奇怪, 因爲它雖然那麼簡單, 但是到現在, 數學界很多很有名的大難題, 還是關於質數的性質。例如說, 很有名的 Goldbach 猜想, 它其實就是很簡單, 猜想每一個偶數都是兩個質數加起來, 我們到現在還是沒有辦法去證明它是對還是不對。而且更奇怪, 例如說, 十九世紀有位數學家叫做 Mertens, 爲了研究質數的性質, 定義了一個 Mertens 函數, 對每一個正整數 n, 都得出另外一個數 $m(n)$, 然後他的猜想就是說: 每一個自然數的 Mertens 函數值 $m(n)$ 都會小於一。然後大家就很努力, 到了九零年代, 數學家已經檢查了幾萬兆的自然數, Mertens 猜想都是對的。你去檢查 1、2、3、4、5, 人家覺得你怎麼這麼無聊, 那麼人家檢查上萬兆的就一定是對的嗎? 居然不是, 居然就是被人家證明出來其實這猜想是錯的。但是我們大家還是找不出來, 到底哪一個數是錯的。所以就是會有這種很奇怪的事情。質數真的是一個非常奇怪的東西, 大家以後如果想要當數學家的話, 可能也會被質數吸引到。

證明的必要性

這也就告訴我們, 爲什麼數學家要證明。有時候覺得證明很慢, 因爲其他不用證明的科學, 都可以一個對、兩個對, 就差不多對了, 我們就接下來做下一步。但是數學不是這樣, 你一定要一直去證明。

第一: *證明是帶來數學的自由*, 譬如說像歐幾里德對質數的證明; 雖然我們找不出那些質數, 但是還是可以用很抽象的方法, 證明出來說: 不用猜了啦, 就無限多個, 數也數不完, 這就代表他的自由。證明給我們這個自由。可能人在有限的生命裡面, 沒有辦法去計算某些事情, 但是還是可以得到非常準確的知識。

第二: 證明帶來數學的眞實。就是像剛剛講的 Mertens 猜想, 是一個正確了一萬兆次的事情, 但是還是可能是錯的。所以沒有證明, 你做的數學就是很像用沙堆塔一樣。如果數學像是蓋城堡, 你要一個證明; 已經證明過的事實你才可以放上去, 這樣子就不會倒。大家如果學到證明了, 就不要覺得很煩, 還是有用的。

圖片來源:Wikipedia

III. 當自然數不敷使用

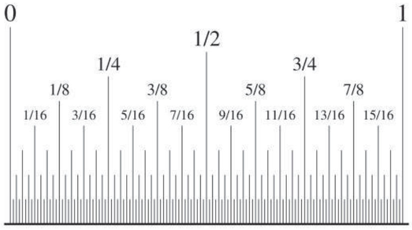
講那麼多都是關於自然數。除了自然數以外, 還有什麼? 因爲很有趣的事情是, 巴比倫時代, 數學非常好, 但是他們的數字裡面沒有 0。現在對你們很自然的, 例如說 0 的概念, 其實是數學家花了幾千年才慢慢建立起來的概念, 結果你們小學就全部學到了。

我們剛剛講說, 正整數加正整數是正整數, 相乘也是得到正整數, 但是減咧? 你如果想要問: 我欠你多少? 例如說, 昨天借我 20, 我今天花你 10 萬, 那麼我還欠你多少? 那麼就是要負數。這個負數 2000 多年之後才出現, 300BC 時首次出現於《九章算經》。據我們所知, 那個減法的概念, 真的是要等; 譬如說農業社會非常成熟之後, 人才會開始處理這個概念。

接下來處理的, 是正整數除以正整數, 它不一定是正整數。我們小時候碰到除法的時候, 一開始說, 喔, 除不盡, 除不盡就不管了, 然後講餘數什麼。你要長大一點才會敎你, 其實有分數這種東西。但是我們從小就知道, 切蛋糕切披薩, 我要一塊我要一塊, 大家都要平分, 那個其實就是分數的開始。

圖片來源:iStock

分數再加上整數, 形成所有有理數。一個很神奇的事情發生了: 從 0 到 1 之間, 有幾個有理數? 無限多個, 對不對? 從 0 到 1, 你永遠都可以中間取一半, 然後再取一半, 然後再取一半, 無限地做下去, 到最後就越來越密; 所以在有限的範圍裡面, 有無限多個數。那就是有理數很奇怪的地方。例如說, π 圓周長, 我們大概都知道, 它不是一個分數, 它不是一個有理數, 但是我們可以寫五十位的數, 它都還是一個有理數。在實際生活, 我們一直可以都用有理數去逼近任何一個數, 用的就是這個性質。

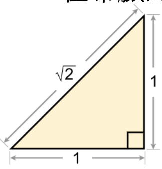


圖片來源:Wikipedia

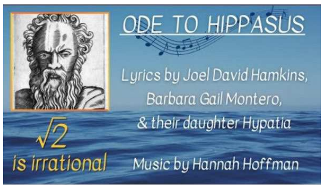
再說一個生活上的例子。例如說, 我們都會講說, 2 月 29 日生日的人很倒楣, 四年才過一次生日, 爲什麼? 因爲一年就是我們轉了個週期, 大概有 365.242191$\cdots$ 這麼多天, 對不對? 它不是整數啊, 那該怎麼辦? 可是我們做月曆總是要有整數嘛。最簡單的方式就是, 每四年有閏年, 閏年的時候就會多一天, 就塞一天進去, 那麼你平均下來, 一年就有 365.25 天, 這就和 365.242191$\cdots$ 比較像, 但每一百年還是會有一天的誤差。波斯曆就算得更準, 每 33 年有 8 個閏年, 這就把後面那些小數點用 8/33 去代替, 它算的是不是就更準了? 這樣子差不多一千年

的誤差還不到一天而已。羅馬教皇的 Gregorian 曆, 是我們現在在用的, 就算得更精準了, 400 年有 97 年的閏年。你可以用越來越複雜的月曆, 讓天數越來越準。這個數字明明就不是有理數, 但是你可以用有理數做曆法。那很棒啊。我們就想說: 有理數就夠了嗎? 還有沒有其他的?

在希臘的時候, 就有人偷偷發現有理數還不夠。因爲畢達德哥拉斯定理告訴我們直角三角形的邊長的關係, 我們就知道: 這最長的邊是 $\sqrt{2}$。問題是 $\sqrt{2}$ 是有理數嗎? 這個事情很嚴重, 據說證明這件事的人被丟進海裡, 很慘, 因爲 $\sqrt{2}$ 不是有理數這件事情, 實在是太讓人震驚。現在可以來看一下影片休息一下, 裡面用了一個非常簡單的方法去證明 $\sqrt{2}$ 不是有理數, 十秒鐘的歌就證完了。

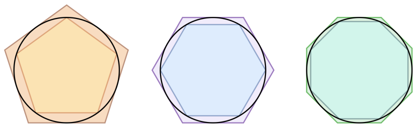


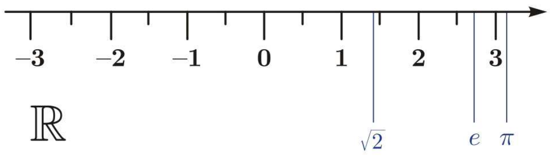
圖片來源:Wikipedia



圖片來源:YouTube

重點是它改變了人類對數字的想像: 居然有理數還是不夠的。其他不是有理數的數, 我們要叫什麼呢? 就是無理數嘛。這兩者合起來我們就叫它實數。你可以拉一條線, 在線上的所有數都叫做實數。這樣夠複雜了吧。

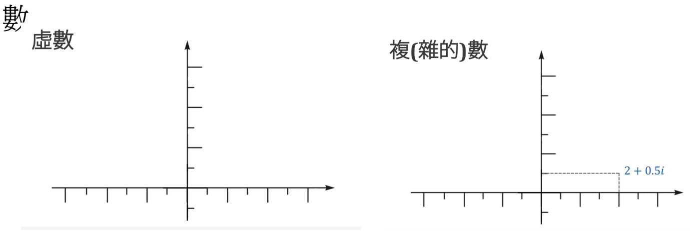

圖片來源:Wikipedia



圖片來源:Weebly

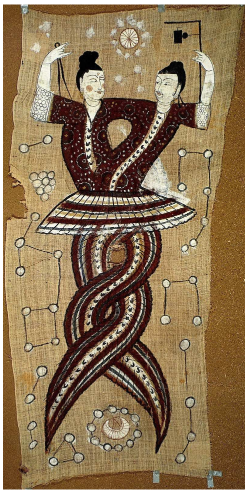
問題是說, 我們剛剛發現了實數, 是因爲我們拿 2 去開根號對不對, 那麼我們能不能拿其他實數去開根號? 可以啊, 爲什麼不可以? 可是問題是, 我如果拿 -1 去開根號, 怎麼辦? 那不對嘛, 你拿正的數也不對啊, 因爲正正得正啊, 你拿負的數也不對啊, 又負負得正啊, 所以就沒有實數可以是 -1 的開根號, 那可怎麼辦呢? 就只好自己再發明新的東西啊。所以我們就發明了一個叫做 i 的東西, i 是什麼? 你問我 i 是什麼, i 就是 -1 的開根號啊, 不過那到底是什麼? 那就是 i 啊, 這就是數學上的定義。我沒有要再去解釋, 它就是這樣, 數學家說的, 好, 那我們就這樣定義啊。那是不是越來越麻煩?

所以說, 除了實數之外, 我們又有這些叫做虛數, 因爲它不實嘛, 不實的數叫 i。我既然發明了一個 i , 我就可以去發明「半個 i」, 然後再去發明「負 0.5 的 i」, 對不對? 那這件事情就越來越麻煩了, 對不對? 這就是虛數。更麻煩的是, 我是不是可以把實數和虛數加起來? 我是數學家, 我說可以就可以; 好, 出來那些數, 就叫做複數, 因爲它很複雜。那麼爲什麼要這樣自我折磨呢? 好, 我們來看一下, 這就講到代數



我們剛剛爲什麼要把 -1 去拿去開根號? 因爲我可能很想去解這個數學方程 $x^2+1=0$, 是吧? 而且, 這個學校都要學啊, 對不對? 學校需要學, 我只好學啊, 學怎麼解方程式 $ax^2+bx+c=0$, a,b,c 可以是任何數; 我就取 a 是 $1, b$ 是 $0, c$ 是 1。問題是說, 你有沒有想過說: 我爲什麼要學這個東西? 和我到底有什麼關係? 大部分的人都學過這個東西, 那麼學這個到底要幹嘛?

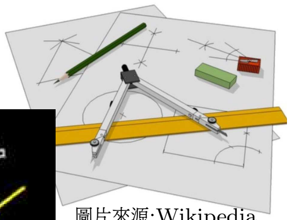
圖片來源:Wikipedia



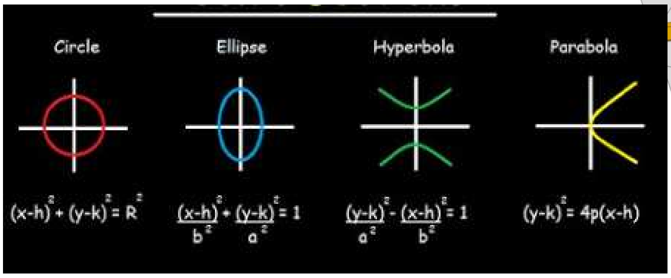
代數

學代數到底要幹嘛?

在希臘時代大家多開心, 做尺規作圖就好了嘛, 對不對? 不但在希臘, 像在漢朝出土的一些漢朝文物上面, 都有伏羲跟女媧, 就是一個規一個矩, 就是尺規做的。以後是不是不要罵人家沒規矩, 只要罵人家沒代數。



圖片來源:Wikipedia



圖片來源:YouTube

尺規可以做出這些圖, 都可以用二次方程式來描述, 那很好啊, 代表說尺規作圖可以去取代二次方程式。那麼我爲什麼還要有更多的東西呢? 尺規作圖沒有辦法解決所有的問題, 例如說, 大家都有學過尺規作圖二等分角。因爲希臘人真的很喜歡尺規作圖, 他們就開始問超級大難題: 要怎麼用尺規作圖去三等分角?

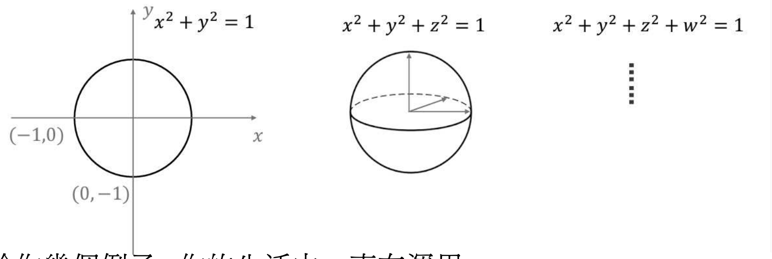
昨天我有上網去找一下, 真的有 YouTube 影片教你怎麼三等分角, 然後還上萬個人看過。這就是告訴我們說, 網上的東西看看就好; 因爲這早就被人家證明出來: 尺規作圖不可能做出三等分角。證明的方式大概就是說: 用尺規作圖做出三等分角, 等同於說: 你要去用尺規作圖去解這個三次方程式 $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$。同時我們數學家早就證明: 只有一次及二次方程式的解可以用尺規做。你們可以自己去找一找那個 YouTube 影片來看看, 然後看看就好。

代數帶來自由

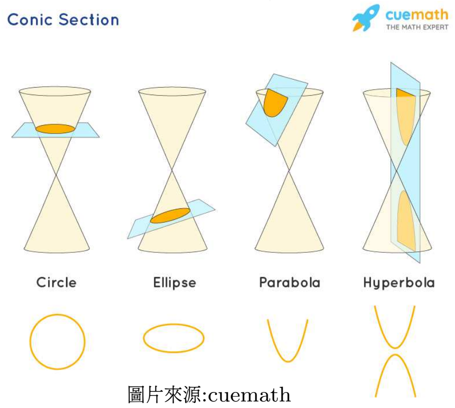
我現在想要告訴你們, 代數其實真的是很有用, 因爲代數給我們的是自由; 這是什麼意思?

例如說二次方程式 $x^2+y^2=1$ 有兩個變數, 我可以畫出紙上的一個圓, 對不對? 如果我們再加一個變數, 它是一個球。可是如果我們不依賴圖像, 而依賴代數的話, 就不一定要二維和三維而已, 我們要幾維都可以。即使畫不出來的東西, 數學家還是可以處理, 因爲有代數。這就是我講的自由。代數讓我們可以研究畫不出來的高維物體。問題是你們想說: 我好好的, 要去研

究 120 維的球, 我是幹嘛? 就像那位同學講的說, 數學家爲什麼要那麼無聊?

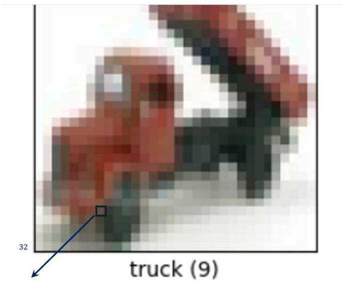


我現在就給你幾個例子, 你的生活中一直在運用高維體的物體的數學。第一個可能比較抽象。有些東西, 你在低維度看, 看得很模糊, 在高維就很清楚。例如說我們剛剛講的這些曲線、拋物線、圓圈、橢圓這些, 看起來都很不一樣, 但你如果由一個三維的角度來看, 它其實是同一個物體的不同切面; 它就是圓錐切面, 只是切的角度不一樣, 就可以切出不一樣的曲線。這個例子很多, 譬如說, 不沾鍋的原理, 其實也是可以用這樣去理解, 這個沒時間講, 就算了。



圖片來源:cuemath

所以說, 高維度的自由可以讓我們帶來更多的理解。而且高維度空間無所不在。譬如說, 一張圖好了。大家都很喜歡照相, 這張圖在你的晶片裡都到底是怎麼處理? 這張圖處理的方式是, 把它變成一個在三千多維度的一個點, 爲什麼? 有想過嗎? 我特別找了一個解析度很低的, 32×32 而已, 它的每一個像素都有三個實數, 代表紅、綠、藍, 三色的訊號強度。例如說像這個, 就是紅比較強。所以每一個像素都是一個三維空間裡面的點。你總共有 32×32 這麼多像素, 所以你算出來, 這張圖是 $32\times32\times3(=3072)$ 三千多維的空間裡面的一個點。它在我們的電腦裡面就是這樣處理。你們平常很好的手機照起來, 都是上百萬維度的空間在做運算。所以說: 沒有代數的概念, 光靠尺規作圖, 難怪希臘人沒有濾鏡, 更別提說現在走紅的人工智慧。

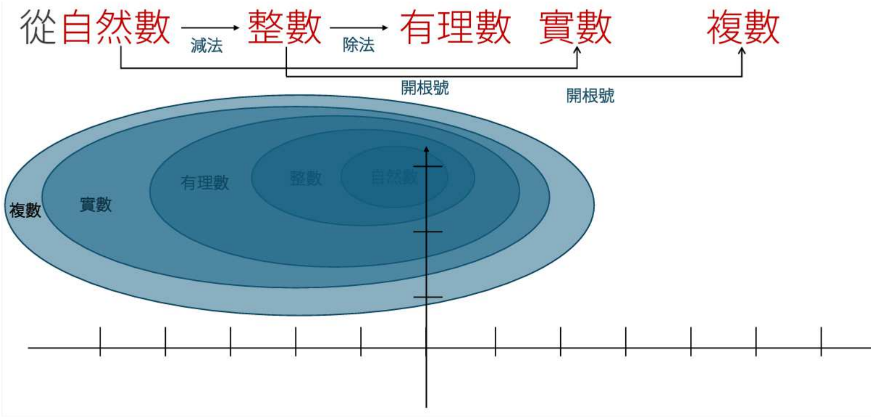


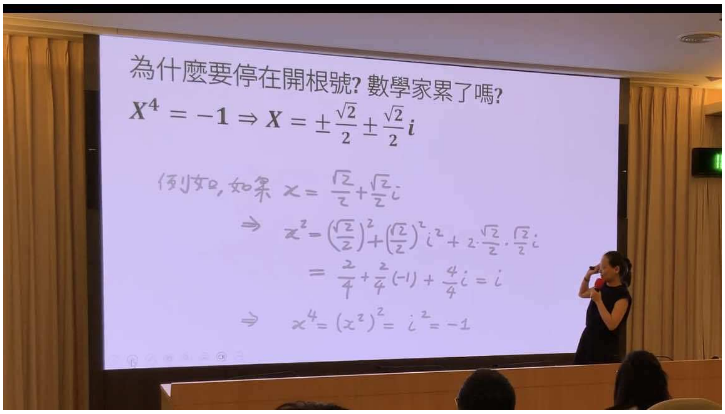
圖片來源:NHSJS

數字會被數學家搞得越來越複雜?

我們就講一講, 是不是單純數字被數學家搞得越來越複雜? 從一開始, 大概五千年前, 我們數數, 很自然的自然數。再過了兩千年, 出現負數和零; 零是一個人類非常重要的發明。自然數再加上零及負的整數, 我們就有了整數。因爲我們要考慮除法, 所以小學我們就學過有理數、分數, 對不對? 可是, 比如說, 有畢達哥拉斯的定理, 所以我們就想要開個根號, 結果發現又不夠用, 實數又要進來了, 越來越大。我就覺得說, 自然數可以加根號, 其他整數我也要開根號, 就變

複數了。所以會越來越大 越來越複雜。





院區開放現場照片

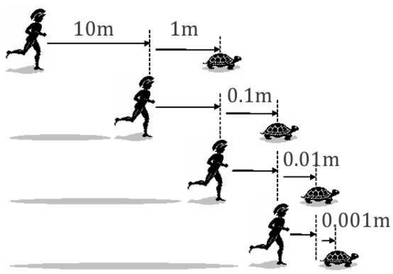
那麼爲什麼我要停在開根號? 我們講過啦, 代數啊, 我可以有無限維度, 我可以有三次方程式, 那麼爲什麼我要停在這裡, 是數學家累了嗎? 你們覺得呢? 其實不是。其實據說發明微積分的萊布尼茨, 也覺得要發明新的數才可以解這個方程式 $X^4 = -1$, 結果他錯了, 因爲你可以證明: 其實複數就可以解那個方程式。我這邊計算給你看: $X = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$。反正細節不重要, 自己去算一算, 就會發現它的四次方就是 -1。而且你也可以證明: 其實複數就足以解答所有多項方程式 $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$。所以數學還是蠻仁慈的, 我們不會要一直去發明新的數, 不然的話學不完。所以我就問你, 沒有對錯, 只是問你的意見。我現在跟你講這個故事後, 你還是覺得說, 只有自然數是自然的, 其他都數學家找出來折磨人的嗎?

IV. 生活中的無限

阿基里斯賽烏龜

無限又是另外一個感覺非常人工的概念。這個故事有看過嗎? 有些人有看過, 就是跑得很快的阿基里斯和烏龜賽跑。他說: 烏龜, 你跑得這麼慢, 我跑的是你的十倍速, 所以我隨便讓你

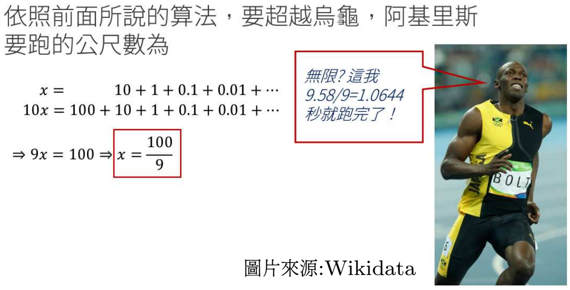
的十公尺。然後烏龜說: 真的嗎, 你覺得你會贏嗎? 阿基里斯跑了十公尺之後, 烏龜只跑了一公尺。在這裡, 阿基里斯從落後十公尺, 變成落後一公尺。然後他說: 一公尺我下一次就追到。他就追到這裡, 結果烏龜領先了 0.1 公尺, 然後他追到這裡; 烏龜領先了越來越少, 可是好像還是一直有領先; 對, 沒錯, 就是多走我一步。但是他的邏輯到底錯在哪裡呢? 你們應該不會有人真的覺得烏龜永遠會贏, 不可能啊。



圖片來源:Medium

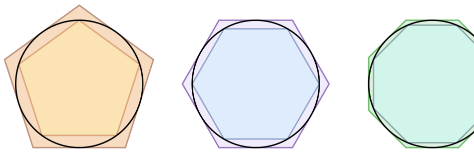
爲什麼希臘人一直卡在這裡? 這到底什麼一回事呢? 就是因爲要怎麼處理無限小、無限大、無限多的概念, 在那時候還不成熟。因爲依照前面的算法, 當然這個有很多算法, 但是依照他的邏輯來講, 阿基里斯要超越烏龜, 他跑的公尺數要超過烏龜的, 對不對? 他要一直追, 追無限多次就追到了。我們就把它加起來叫做 x。他的謬誤叫做 Zeno's 悖論。Zeno's 悖論的謬誤就是說: 你有無限多個加號, 並不代表說答案是無限大。有人知道這個要怎麼算嗎?

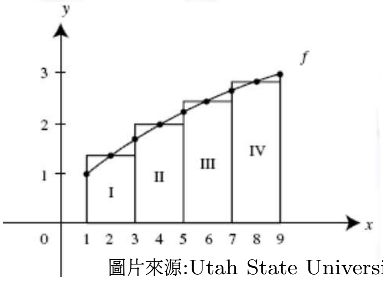
容易的算法就是: 我把它乘以 10; 乘以 10 的話, 這個 10 變 100, 1 變 10, 對不對? 可是它還是有無限多項。然後把這兩個相減, 這些都 cancel 掉, 因爲它們都是一樣, 所以我就得到說: 9 個 x 是 100, 對不對? 所以 x 是 100/9, 那是不是無限? 沒有, 很有限, 對不對? 他就是 100/9。例如說我們現在的紀錄保持人, Usain Bolt, 這對他來講, 一秒就跑完了, 對不對? 他真的跑很快。



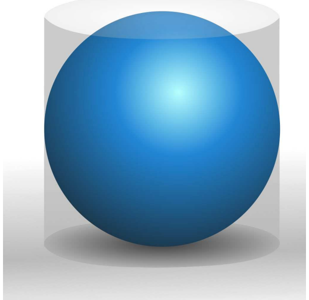
圖片來源:Wikidata

所以呢, 要處理這樣子的悖論, 我們要能夠去處理無限小、無限大、無限多的概念。這還是要回到數學家。或者是說, 我們要算例如說, 圓的周長, 或者是面積, 要怎麼算? 以前希臘人阿基米德把這個放在他的墓碑上面, 據說喔, 因爲他覺得這實在是在當年最酷的方程式, 就是這個原柱體和這個圓球面積是一樣, 他怎麼算? 他也是把球面割得很小很小、無限小的方格去算, 對不對? 現在我們把這個東西系統化, 叫做積分。


圖片來源:Wikidata



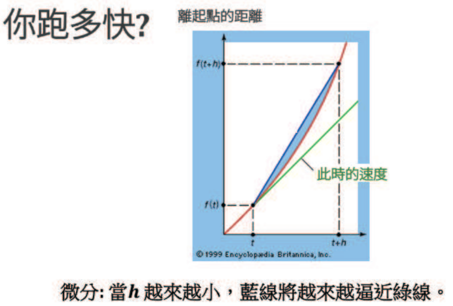
圖片來源:Utah State University



圖片來源:Wikimedia

積分的概念其實也非常簡單, 我們有一個曲線, 想要算它下面的面積; 就像說這個曲線可能是一個圓, 我們就把它切成無限多條長方形去估計, 得到的這些無限多的、無限細的長方形面積加起來, 就是它的真實面積。這就是積分在做的事情。其實這和之前阿基米德那些, 用的都是無限小這個概念, 所以這概念聽起來很人工, 但是他處理的卻是很自然的事情, 例如圓的面積。

或者是說, 你要說我跑多快? 例如說, 我畫一個函數好了, 這個紅線是說我幾秒的時候跑了幾公尺。因爲我很厲害, 我要去比奧運, 所以我必須要非常精確地知道, 我每一個時間的精確地速度。我現在有這個曲線, 要怎麼去算? 例如說這個藍線, 它算的是什麼? 這個藍線在算的是說: 我在 t 到 $t+h$ 這段時間的平均速度, 它就是這條藍線的斜率。那麼我要怎麼去算? 我覺得讓 h 變得越來越小, 越來越小, 這個藍線就會越來越像綠線。因爲綠線是切線, 綠線的斜率就是當下的速度。這就是現代的微分, 與積分加起來就是微積分。



圖片來源:Encyclopedia Britannica

我們知道說, 沒有微積分, 其實現在任何的科技都不可能, 因爲我們隨時都要知道而且很能夠很精確地算得出來, 例如說火箭的速度, 或者是面積有多少, 甚至說現在公司要做財報, 也都是要用到微積分。這就是生活中的無限。其實你就覺得有些事情聽起來, 是數學家又在無聊了, 但是其實並不是這樣。

圖片來源:Financial Times

圖片來源:Mechanical-Engineering.com

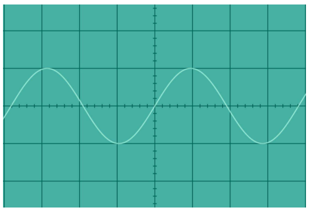
V. 數學的美感

最後幾分鐘, 我們就講了一些非常輕鬆的事情。數學不但很有用, 很有實用價值, 也是一個很有美感的東西, 或者是說, 很多美感也是要建構在數學之上。那聽起來有點奇怪。第一個我

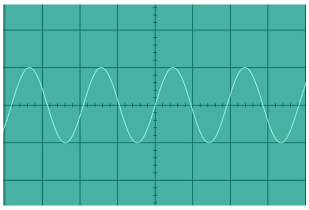
們要講的就是, 你可以同意也可以不同意, 這當然是見仁見智, 但是很多數學家會有這樣子的感覺, 就例如說我和同事、其他數學家討論, 常常大家講說: 這篇文章很美, 那個方程式實在是太美了, 那講的到底是什麼? 那我覺得羅素他講得很好:

> 數學, 正確看待時, 不僅具有眞理, 還具有至高的美, 一種冷而嚴峻的美, 一種屹立不搖的美, 如雕塑一般, 一種不爲我們軟弱天性所動搖的美。也不像繪畫或音樂有富麗堂皇的裝飾, 而是純粹地崇高、絕對地完美, 是最偉大的藝術, 然而這是極其純淨的美, 只有這個最偉大的藝術才能顯示出最冷酷的完美 (stern perfection)。[羅素 1918]

他形容一種冷而嚴峻的美, 一種屹立不搖的美。爲什麼是屹立不搖? 就像我剛剛說的, 就是數學是建立在證明上面; 當然不是完全, 但是和其他的學科比起來, 因爲它有證明, 證明當做基本, 所以它在這個基本上, 是會讓人有屹立不搖的感覺。那麼爲什麼是冷而嚴峻呢? 可能就是因爲它很難, 老實說並不容易; 可能你要一個結果; 可能要花很多很多的時間, 所以在當你自己在做的時候, 可能會有一種「這個方程式怎麼對我這麼差、這麼嚴厲, 可是又很美」這樣子的感覺, 其實就是很抽象的來講, 數學家常在追求一種完美的感覺。



$\sin \omega t$



$\sin 2\omega t$

音樂與數學

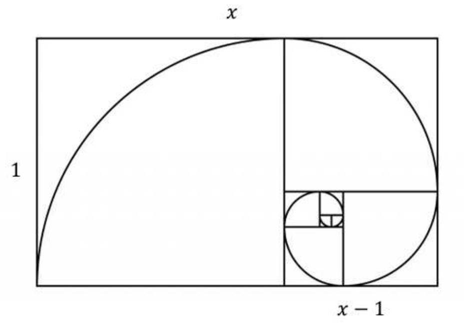
我們再來看一些其他比較不很抽象的事情, 比如說數學和音樂。你要去討論音樂, 其實也需要數學。像現在很多音樂可能是用合成器, 那裡面用到的也都是數學。比如說中央 C 好了, 其實如果音叉打開來, 它的音波差不多就是長這樣, 左右軸是時間, 上下軸是它的訊號的大小。它有一個固定的頻率, 像中央 C 差不多是 262 赫茲, 我們就把這個赫茲, 比如說叫做 ω。我如果今天把那個頻率變兩倍, 出來的是什麼音? 高八度的音, 大家都很有概念。那我再問你, 有沒有人知道, 如果把中央 C 的頻率乘三倍變成了什麼音? 猜得出來嗎? 有人猜出來嗎? 更高的 C? 錯。

爲什麼? 因爲其實每高八度, 頻率就要乘以二, 所以你要再高。樂理上說 perfect five, 就是 C 跟 G 聽起來很和諧, 因爲它的頻率也是剛好是三倍, 所以這個頻率其實出來的是 G。在網路上有一些工具, 你可以唱歌, 然後它就把你的頻率弄出來, 用影像畫出來。所以學樂理的時候, 可以順便學數學。當然很多人就會去討論音樂和數學的關係。除了這個之外, 有很多人分析的, 就是巴哈的賦格; 他的布蘭登堡裡面很多對稱性, 是可以用數學去理解: 爲什麼聽起來這麼和諧這麼好聽? 就是因爲它有一個數學的規律性在, 這個今天就不講。

黃金比例

再講一個很數學的美感。這應該學校有學過, 就是黃金比例。自然界裡面很多東西, 尤其是

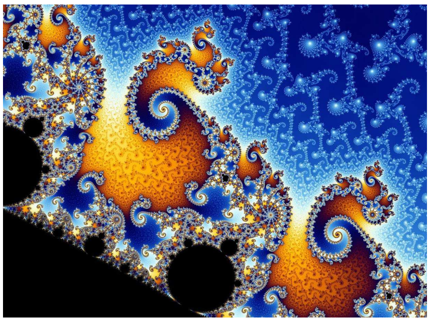
我們會覺得漂亮的東西, 都是黃金比例。爲什麼黃金比例會漂亮呢? 我覺得是因爲它有一個自我相似的性質; 這樣子一個黃金比例的曲線, 可以一直一直畫下去, 每一個看起來都差不多。你要算它最後的比率的話, 就這樣做: 大的長方形的比率例如說是 1 比 x, 對, 左邊長是 1; 小一點的長方形, 它的寬只剩 $x-1$, 對不對? 它的長是 1, 對不對? 但是我們要求這兩個長方形基本上形狀一模一樣, 大小的縮放而已, 比例是一模一樣。這樣你得到一個二次方程式 $\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$, 就是 $x(x-1)=1$, 也就是 $x^2-x-1=0$。你用大部分的人好像都還記得的方法去解, 就得出黃金比例 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\cdots$, 對不對? 所以它美在哪裡, 也是要靠數學來理解。



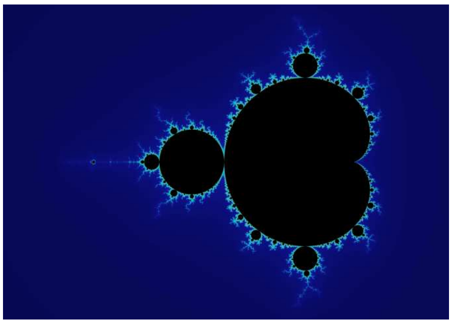
圖片來源:Science Direct

曼德柏(Mandelbrot) 集合

我今天講得差不多了。給你們看這個數學上出來的圖, 它美在哪裡? 就是美在它的數學真的非常簡單。就是這樣子的一個無限循環的方程式 $z_{n+1}=z_n^2+c$。就是給一個數 z, 這裡 z 是我們剛剛講的複數, 所以才會是一個二維的圖; 然後你把它平方, 然後再加上一個數 c, 然後你就得到下一個數, 而後你再去無限循環。有些複數 c, 它的無限輪迴會是在一個範圍裡面轉, 那些數 c 我們就劃黑的; 有些數 c 會轉出去, 然後跑越來越遠、越來越遠、越來越遠, 那些數 c 我們就把它上顏色; 跑越來越快, 越快的顏色就越淺。然後我們就得到所謂的 Mandelbrot 的集合。可是爲什麼大家很知道這個問題? 就是因爲這實在太漂亮了。我演講就到這邊結束。給你們看影片: 它一直放大, 可以無窮地放大下去。如果禮拜天、下雨天沒事做, 把它打開, 就可以一直看。看一下! 快多多享受迷人數學吧, 真的是很多很漂亮的東西可以看。



圖片來源:Wikipedia



圖片來源:Ankerd

—本文作者任職中央研究院數學研究所—